Министерство на образованието и науката

Съюз на математиците в България

Пролетни математически състезания

Плевен, 26 март 2022 г.

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ И ОЦЕНЯВАНЕ

5 клас

Задача 1. (6 т.) Изчислете сбора $a+b$, ако $a+b$ е естествено число,

$a=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{2022}{2023}$ и $b=\frac{2}{4}+\frac{2}{6}+\cdots+\frac{2}{4046}$.

Решение: След съкращаване $b=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2023}$ (**2**т.). За сбора $a+b$ имаме $a+b=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{2022}{2023}+\frac{1}{2023}\right)(\mathbf{2}\text{т.})=2022(\mathbf{2}\text{т.})$.

Задача 2. (6 т.) Намерете остатъка при делението на произведението 2021.2022.2023 на 11.

Решение: Имаме 2021 = 183.11 + 8 (**1**т.), 2022 = 183.11 + 9 (**1**т.), 2023 = 183.11 + 10 (**1**т.). Търсеният остатък получаваме като разделим 8.9.10 = 720 на 11 (**2**т.). Получаваме 720 = 65.11 + 5, т.е. търсеният остатък е 5 (**1**т.).

Задача 3.(7 т.) На едно състезание по математика са зададени четири задачи и се явили 30 ученици. Първата задача е решена от 22-ма, втората задача е решена от 23-ма, третата задача е решена от 24-ма и четвъртата е решена от 25 ученици. Покажете, че поне четирима от участниците са решили всичките четири задачи.

Решение: Да приемем, че твърдението не е вярно, т.е. можем да приемем, трима или по-малко на броя ученици са решили всички задачи (**2**т.). Остават 27 ученици, които може да са решили по най-много 3 задачи, т.е. общо 27.3 = 81 (**2**т.) и ако трима са решили и четирите задача, общият брой решени задачи ще е 81 + 12 = 93 (**1**т.). По условие този брой е 22 + 23 + 24 + 25 = 94 (**1**т.). Противоречие (**1**т.)!

Задача 4. (7 т.)Разглеждаме всички четирицифрени числа, записани само с цифрите 1 и 2. Вярно ли е, че измежду тези числа няма две, които дават един и същ остатък при деление на 16? Обосновете отговора!

Решение: Броят на разглежданите числа е 16 (**1**т.). За последните две цифри на тези числа имаме четири възможности 11, 12, 21, 22. Тези числа дават различни остатъци при деление с 4 (**2**т.). Пред всяко от тези числа можем да прибавим 1 или 2, т.е. да добавим 100 или 200. В първия случай числото 100 е кратно на 4, но не е кратно на 8, а във втория е кратно на 8. Следователно ще получим осем трицифрени числа, които при деление на 8 ще дават различни остатъци (**2**т.). Четирицифрените числа получаваме като пред разглежданите осем числа поставяме 1 или 2, те. Добавяма 1000 или 2000 и разсъждаваме аналогично (**2**т.).

6 клас

Задача 1. (6 т.) Представете сбора $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+2022}$ във вид на несъкратима дроб.

Решение: Като използваме, че $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ (**1**т.), получаваме $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+2022}=1+\frac{2}{1.2}+\frac{2}{2.3}+\cdots+\frac{2}{2022.2023}=1+2.\left(1-\frac{1}{2}\right)+2.\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$+...+$2.\left(\frac{1}{2022}-\frac{1}{2023}\right)(\mathbf{2}\text{т.})=1+\frac{2021}{2023}=\frac{4044}{2023}(\mathbf{2}\text{т.})$. Тази дроб е несъкратима, което се вижда от последното представяне $(1+\frac{2021}{2023})$ (**1**т.).

Задача 2.(6 т.) Куб с дължина на ръба 10 см е оцветен в бяло, след което е нарязан на 1000 кубчета с дължина на ръба 1 см. Намерете $|n-m|$, където n е броят на кубчетата без нито една оцветена стена, а m е броят на кубчетата с поне една оцветена стена.

Решение: Кубчетата от сърцевината образуват куб с дължина на ръба 8 (**2**т.), т.е. тяхният брой е 8.8.8 = 512 (**2**т.). Останалите 1000 – 512 = 488 (**1**т.) имат поне една оцветена стена, т.е. *n* = 512 *m* = 488. Търсената разлика е 24 (**1**т.).

Задача 3.(7 т.) Покажете, че разликата $11^{2022}-7^{2022}$ се дели на 19.

Решение: Имаме $7^2=49=2.19+11$ (**1**т.) и $11^2=121=6.19+7$(**1**т.), откъдето 7^3 и 11^3ще дават един и същи остатък, който получаваме от $7.11=77=4.19+1$ (**3**т.). Ясно е сега, че както 7^n така и 11^n ще дават един и същи остатък 1, когато *n* се дели на 3 (**2**т.). Понеже 2022 се дели на 3, то твърдението е доказано (**1**т.).

Задача 4. (7 т.)Намерете двойка двуцифрени числа $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$, такива че числото $n=\frac{\overline{abcd}}{\overline{ab}+\overline{cd}}$ е цяло и приема

а) най-малка стойност;

б) най-голяма стойност.

Решение: Имаме $n = \frac{\overline{abcd}}{\overline{ab}+\overline{cd}} = \frac{100\,\overline{ab}+\overline{cd}}{\overline{ab}+\overline{cd}} = 99\frac{\overline{ab}}{\overline{ab}+\overline{cd}} + 1$(**1**т.). За намиране на най-малката и най-голямата стойност на цялото число $99\frac{\overline{ab}}{\overline{ab}+\overline{cd}}$ ще използваме следните помощни неравенства.

а) ако $0 < x, 0 < y_1 < y_2$, то $\frac{x}{x+y_1} < \frac{x}{x+y_2}$ (**1**т.);

б) ако $0 < x_1 < x_2, 0 < y$, то $\frac{x_1}{x_1+y} > \frac{x_2}{x_2+y}$ (**1**т.).

Ясно е, че най-малко е стойността при най-малкото двуцифрено число $\overline{ab} = 10$ и понеже n трябва да е естествено число, то единствената възможност е $\overline{cd} = 89$.

Обратно, най-голяма стойност ще имаме при най-голям числител 89, защото $\overline{ab} + \overline{cd} = 99$ и $\overline{ab} = 89$.

Следователно най-малката стойност е при $\overline{ab} = 10$ и $\overline{cd} = 89$ (**2**т.), а най-голямата стойност е при $\overline{ab} = 89$ и $\overline{cd} = 10$(**2**т.).

7 клас

Задача 1.(6 т.) Решете уравнението $\frac{x+6}{5} + \frac{x+7}{6} + \frac{x+8}{7} + \frac{x+9}{8} + \frac{x+10}{9} + \frac{x+11}{10} = 6.$

Решение: След опростяване уравнението се свежда до вида $a.x = b$, където *a* е положително числа като сбор от положителни дроби (**2**т.). От теорията знаем, че такова уравнение винаги има корен и той е единствен (**2**т.). Забелязваме, че при $x = -1$ всяко от събираемите в лямата част на уравнението приема стойност 1, т.е. $x = -1$е решението на уравнението (**2**т.).

Задача 2. (6 т.) Нека *ABC* е равнобедрен триъгълник с бедра *AC* и *BC* като *AB* > *BC*. Точката M лежи върху страната *AB* и *BM* = *BC*, а точката *N* лежи върху бедрото *AC* като *AN*=*AM*. Да се намерят мерките на ъглите на триъгълника *ABC*, ако е известно, че правите *CM* и *BN* са перпендикулярни.

Решение: Означаваме $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = 2x$. От условието следва, че ΔAMN и ΔMBC са равнобедрени с едни и същи ъгли $2x, 90° - x, 90° - x$(**1**т.). От условието $CM \perp BN$ и $BM = BC$, следва че BN е симетрала на CM(**1**т.). Следователно $\sphericalangle NMC = \sphericalangle NCM = 90° - 3x$(**1**т.). Ако използваме, че $\sphericalangle AMN + \sphericalangle NMC + \sphericalangle CMB = 180°$, получаваме $2(90° - x) + 90° - 3x = 180°$ откъдето $x = 18°$(**2**т.). Окончателно $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = 36°, \sphericalangle ACB = 108°$(**1**т.).

Задача 3. (7 т.) Нека *К* е деветцифрено число, записано с всички цифри от 0 до 9 без 5. Покажете, че не могат да се намерят естествени числа *m* и *n*, такива че $K = m^3 + n^3 - 7m + 8n$.

Решение: Цифрите на числото *К* са 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 и 9, като всяка от тях участва по веднъж. Сборът им е 55 – 5 = 50 и при деление на 3 дава остатък 2 (**2**т.). От друга страна ако *m* и *n* удовлетворяват даденото равенство, т.е. $K = m^3 + n^3 - 7m + 8n = (m^3 - m) + (n^3 - n) - 6m + 9n$ (**3**т.). Последното се дели на 3, защото $m^3 - m = (m-1)m(m+1)$ е произведение на три последователни числа, а същото се отнася и за $n^3 - n$ (**2**т.). Противоречие!

Задача 4. (7 т.)За всяко естествено число *n* означаваме с K_n броя на нулите, с които завършва произведението 1.2.3... *n*. Намерете най-малкото *n*, за което $K_{n+10} - K_n = 2022$.

Решение: Броят на нулите в произведението 1.2.3... *n* е равен на максималната степен на 5, която дели това произведение (**1**т.). Тогава K_{n+10} ще се получи от добавянето към K_n на степента на 5 в произведението $(n+1)(n+2) \dots (n+10)$. В това произведение имаме точно две числа, които се делят на 5, като точно едно от тях не се дели на 25 (**3**т.). Следователно другият множител, кратен на 5, трябва да се дели точно на 5^{2021} или

$n = 5^{2021} - 10$ (**3**т.).