Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Пролетни математически състезания
9-12 клас

Плевен, 31 март – 2 април 2014 г.

София, 2014 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 9.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението $x^2 + 8 = |x + a| + |x - a|$ има нечетен брой различни реални корени.

Решение. Отговор: $a = \pm 4$. Ако x_0 е решение на даденото уравнение, лесно се вижда, че и $-x_0$ е негово решение. Следователно уравнението може да има нечетен брой решения само ако $x = 0$ е негово решение. Тогава $8 = 2|a|$, откъдето необходимо условие е $a = \pm 4$. Ще докажем, че това условие е и достатъчно. При $a = \pm 4$ получаваме уравнението $x^2 + 8 = |x + 4| + |x - 4|$, което е еквивалентно на

$$\left|\begin{array}{l} x^2 + 2x + 8 = 0 \\ x \leqq -4 \end{array}\right. , \quad \left|\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ -4 < x < 4 \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left|\begin{array}{l} x^2 - 2x + 8 = 0 \\ x \geqq 4 \end{array}\right. .$$

и има единствено решение $x = 0$ с което задачата е решена.

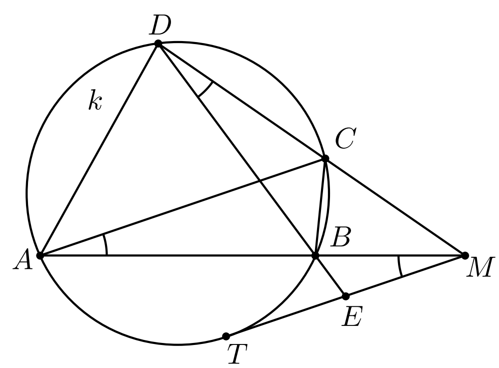
Оценяване. (6 точки) 2 т. за извода, че необходимо условие е $a = \pm 4$; 4 т. за доказателство, че това условие е и достатъчно.

Задача 9.2. Нека $ABCD$ е вписан в окръжност k четириъгълник и продълженията на страните AB и CD се пресичат в точка M. Нека MT е допирателна към k ($T \in k$) и правата BD пресича отсечката MT в точка E. Ако MT е успоредна на диагонала AC, то да се намери отношението $EM : ET$.

Решение. От $MT \parallel AC$ следва, че $\sphericalangle EMB = \sphericalangle BAC$. Но $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$ и следователно $\triangle EMB \sim \triangle EDM$, т.е.

$$\frac{EB}{EM} = \frac{EM}{ED} \Rightarrow EM^2 = EB.ED.$$

От друга страна, от свойството на секущите следва, че $ET^2 = EB.ED$. Тогава $EM = ET$, което означава, че търсеното отношение е 1.



Оценяване. (6 точки) 2 т. за $\triangle EMB \sim \triangle EDM$; 1 т. за $EM^2 = EB.ED$; 2 т. за $ET^2 = EB.ED$; 1 т. за $EM : ET = 1$.

Задача 9.3. Фигурата, получена от квадрат 2×2 след премахването на една негова клетка се нарича *триклетъчен ъгъл*. Възможно ли е клетките на една шахматна дъска с размери 3000×3000 да бъдат оцветени в бяло и черно по такъв начин, че както и да се разреже тази дъска на 3 000 000 триклетъчни ъгъла, всеки от тях да съдържа точно по една черна клетка?

Решение. Отговор: Не!

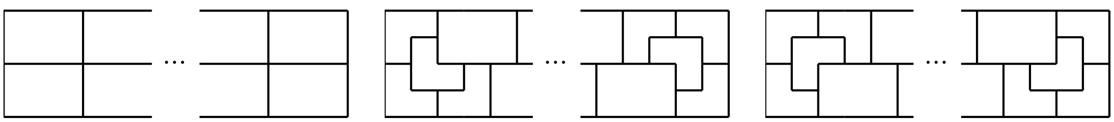
Да допуснем противното. Оцветяването трябва да съдържа точно три милиона черни клетки.

Да разрежем дъската на 1500^2 квадратчета 2×2. Да допуснем, че всяко от тези квадратчета, което не граничи с ръба на дъската, съдържа най-много една черна клетка. Тогава имаме общо не повече от $1498^2 + 4 \times 1499 \times 4 < 3\,000\,000$ черни клетки: противоречие.

Да разгледаме едно "вътрешно" квадратче s, което съдържа поне две черни клетки. Нека S е правоъгълника с размери 4×3000, съставен от квадратчето s, всички други квадратчета 2×2 в същите два реда, и всички квадратчета 2×2 в следващите два реда.

Частта от дъската, която лежи извън S, можем да разрежем на хоризонтални правоъгълници 2×3, а следователно и на триклетъчни ъгли.

Правоъгълникът S, от друга страна, можем да разрежем на триклетъчни ъгли и правоъгълници 2×3 по следните три начина:



Лесно се вижда, че в поне един от тях разрязването ще може да се довърши по такъв начин, че двете черни клетки от s да попаднат в един и същи триклетъчен ъгъл: противоречие.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за наблюдението, че има квадратче 2×2, което съдържа две черни клетки; 5 т. за доказателството, че има разрязване, едно от ъгълчетата в което съдържа тези две черни клетки.

Задача 9.4. Да се реши в естествени числа уравнението $x^3 - 5x + 28 = 2^y(2^y + 1)$.

Решение. Да разгледаме уравнението по модул 7. Лявата страна може да дава остатъци 0, 2, 3, 4 и 5, а дясната 2 и 6. Следователно и двете страни дават остатък 2 при деление на 7, като това може да се случи само когато y се дели на 3. Нека $y = 3k$, $k \in \mathbb{N}$, и да запишем уравнението във вида

$$x^3 - 4^{3k} = 2^{2k} + 5x - 28 \iff (x - 4^k)(x^2 + 4^k x + 4^{2k}) = 2^{3k} + 5x - 28.$$

Ако $x < 4^k$, лявата страна е отрицателна и значи $0 > 2^{3k} + 5x - 28 \geq 5x - 20$, откъдето $x < 4$. Непосредствена проверка за $x = 1, 2, 3$ не дава решения.

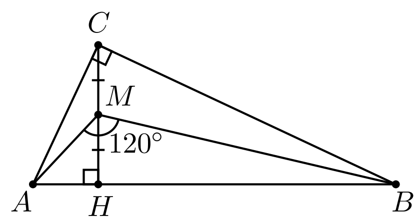
Ако $x > 4^k$, лявата страна е поне $x^2 + 4^k x + 4^{2k} \geq x^2 + 4x + 2^{4k} > 5x + 2^{3k} > 2^{3k} + 5x - 28$.

Остава случаят $x = 4^k$, при който получаваме $2^{3k} + 5.4^k = 28$, което очевидно е изпълнено само при $k = 1$. Следователно $x = 4$ и $y = 3$ е единственото решение.

Забележка. Оказва се, че в множеството на целите числа уравнението има същите решения - виж 10.4.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за разглеждане на уравнението по модул 7 (или друг модул, който да води до извода, че y се дели на 3); 1 т. за $3|y$; 1 т. за преобразованието; по 1 т. за случаите $x < 4^k$, $x > 4^k$ и $x = 4^k$.

Задача 10.1. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$, $AC \leqq BC$). Ако M е средата на височината CH ($H \in AB$) и $\sphericalangle AMB = 120^\circ$, то да се намери $AC : BC$.



Решение. Ще използваме стандартните означение за $\triangle ABC$. Първо да обърнем внимание, че

$$S_{ABC} = 2S_{ABM} = AM.BM.\sin 120^\circ$$

и следователно $AM.BM = \dfrac{ab}{\sqrt{3}}$. От друга страна, от косинусова теорема за $\triangle ABM$ получаваме

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2AM.BM.\cos 120^\circ = AM^2 + BM^2 + AM.BM$$

и следователно

$$AM.BM = AB^2 - (AH^2 + HM^2) - (BH^2 + HM^2) = 2AH.BH - 2HM^2 = \frac{3}{2}h^2 = \frac{3a^2b^2}{2(a^2+b^2)}.$$

Така достигаме до $\dfrac{ab}{\sqrt{3}} = \dfrac{3a^2b^2}{2(a^2+b^2)} \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{b}{a}\right)^2 - 3\sqrt{3}\left(\dfrac{b}{a}\right) + 2 = 0$ и понеже $b \leqq a$ следва, че $AC : BC = \dfrac{3\sqrt{3} - \sqrt{11}}{4}$.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за $AM.BM = \dfrac{ab}{\sqrt{3}}$; 2 т. за $AM.BM = \dfrac{3a^2b^2}{2(a^2+b^2)}$; 2 т. за $AC : BC = \dfrac{3\sqrt{3} - \sqrt{11}}{4}$.

Задача 10.2. Да се намерят стойностите на параметъра a, при които уравненията

$$a.5^{2x-1} + |a-5|.5^{x-1} = 1 \quad \text{и} \quad 9^x + 3^{x+1} = 4$$

са еквивалентни.

Решение. Записваме второто уравнение във вида $(3^x-1)(3^x+4)=0$, но $3^x+4>0$ и остава $3^x-1=0$, т.е. $x=0$. Следователно необходимо условие двете уравнения да са еквивалентни е $x=0$ да е корен на първото уравнение. След заместване получаваме $a+|a-5|=5 \Leftrightarrow a \leqq 5$. При $a \leqq 5$ първото уравнение добива вида

$$a.5^{2x-1}+(5-a).5^{x-1}-1=0 \Leftrightarrow a.(5^x)^2+(5-a)5^x-5=0 \Leftrightarrow (5^x-1)(a5^x+5)=0.$$

Ако $a \geq 0$ или $a=-5$, то достигаме до единствено решение $x=0$. Ако $a<0$ и $a \neq -5$, получаваме две различни решения $x=0$ и $x=1-\log_5(-a)$. Така окончателно търсените стойности на a са $[0,5] \cup \{-5\}$.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за решаване не второто уравнение и достигане до необходимото условие $a \leqq 5$; 4 т. за получаване на окончателния отговор.

Задача 10.3. Даден е четириъгълник $ABCD$, вписан в окръжност k с диаметър 1. Да се намери най-голямата възможна стойност на сумата от радиусите на окръжностите, вписани в $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$ и $\triangle DAB$.

Решение. Ще използваме следното помощно твърдение:

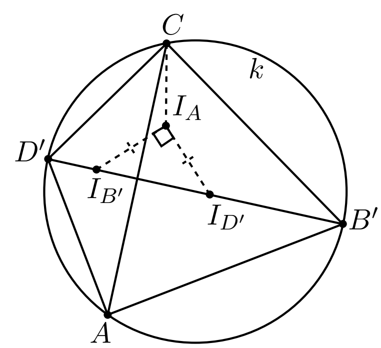
Лема 1. Нека XY е хорда в окръжност ω и точката Z обхожда дъгата $\widehat{XY}$. Тогава радиусът r_{XYZ} на вписаната в $\triangle XYZ$ окръжност достига максимума си, когато Z е среда на дъгата $\widehat{XY}$.

Доказателство. Ако I е центъра на вписаната в $\triangle XYZ$ окръжност, то $\sphericalangle XIY = 90^\circ + \dfrac{1}{2}\sphericalangle XZY$ и следователно когато Z обхожда дъгата $\widehat{XY}$, I също обхожда някаква дъга с краища X и Y. При това е очевидно, че разстоянието от I до XY е максимално точно когато I съвпада със средата на тази дъга, т.е. когато Z е среда на $\widehat{XY}$.

От горната лема следва, че

$$r_{ABC}+r_{ADC} \leqq r_{AB'C}+r_{AD'C},$$

където B' и D' са средите на съответните дъги $\widehat{ABC}$ и $\widehat{ADC}$. Ако означим с $I_{D'}$ и $I_{B'}$ центровете на вписаните в $\triangle AB'C$ и $\triangle AD'C$ окръжности, то $r_{AB'C}+r_{AD'C} = I_{B'}I_{D'}$. От друга страна, ако означим с I_A центъра на вписаната в $\triangle B'CD'$ окръжност, то



$$\sphericalangle CI_AD' = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle CB'D' = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle CAD' = \angle CI_{B'}D$$

и аналогично $\sphericalangle CI_AB' = \sphericalangle CI_{D'}B'$, т.е. четириъгълниците $CI_AI_{B'}D$ и $CI_AI_{D'}B'$ са вписани. Тогава $\sphericalangle I_AI_{B'}I_{D'} = \sphericalangle I_ACD' = 45^\circ$ и $\sphericalangle I_AI_{D'}I_{B'} = \sphericalangle I_ACB' = 45^\circ$, т.е.

$I'_B I'_D = 2r_{B'D'C}$. Прилагайки отново лемата достигаме до извода, че стойността на израза $r_{ABC} + r_{ADC}$ е най-голяма точно тогава, когато $ABCD$ е квадрат. Аналогично и стойността на израза $r_{BAD} + r_{BCD}$ е най-голяма точно тогава, когато $ABCD$ е квадрат. Остава да пресметнем, че този случай $r_{ABC} + r_{ADC} = r_{BAD} + r_{BCD} = \sqrt{2} - 1$ и така окончателно търсената максимална стойност е $2\sqrt{2} - 2$.

Забележка. Втората част на задачата (разглеждането на делтоида $AB'CD'$) може да се реши метрично като се въведе $\sphericalangle AB'D' = \alpha$ и се пресметне, че $r_{AB'C} + r_{AD'C} = \sin\alpha + \cos\alpha - 1 \leqq \sqrt{2} - 1$. Също така може да се използва и известната Японска теорема за четириъгълника, която твърди, че ако $ABCD$ е вписан в окръжност четириъгълник, то $r_{ABC} + r_{ADC} = r_{BAD} + r_{BCD}$.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за търсене на максимума на $r_{ABC} + r_{ADC}$ и свеждане на задачата до делтоид; 3 т. за сеждане на задачата до квадрат; 1 т. за пресмятане на търсената максимална стойност.

Задача 10.4. Да се реши в цели числа уравнението $x^3 - 5x + 28 = 2^y(2^y + 1)$.

Решение. Ако $x \leq -4$, то лявата страна на уравнението е отрицателна, а дясната е винаги положителна. Случаите $x = -3, -2, -1$ и 0 се отхвърлят с директна проверка. Лесно се вижда, че $y = 0$ не води до решение, а при отрицателно y дясната страна не е цяло число за разлика от лявата. Тогава x и y са естествени числа и нататък решението следва решението на задача 9.4.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за случая $x, y \leqq 0$; 2 т. за $3|y$; 1 т. за преобразованието; по 1 т. за случаите $x < 4^k$, $x > 4^k$ и $x = 4^k$.

Задача 11.1. Дадено е уравнението $5 - 4\sin^2 x - 8\cos^2 \dfrac{x}{2} = 3m$, където m е реален параметър.

а) Да се реши уравнението при $m = 0$;

б) Да се намерят всички цели стойности на параметъра m, при които уравнението има решение.

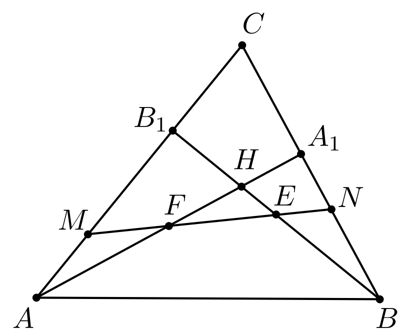
Решение. а) Тъй като $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ и $\cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x$, даденото уравнение е еквивалентно на $4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$. Корените на квадратното уравнение $4y^2 - 4y - 3 = 0$ са $y_1 = \dfrac{3}{2} > 1$ и $y_2 = -\dfrac{1}{2}$. Следователно $\cos x = -\dfrac{1}{2}$, т.е. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

б) Както в подточка а) получаваме уравнението $4\cos^2 x - 4\cos x - 3(m + 1) = 0$. Търсим за кои цели стойности на m уравнението $f(t) = 4t^2 - 4t - 3(m + 1) = 0$ има корен в интервала $[-1, 1]$. Тъй като графиката на $f(t)$ е симетрична спрямо оста на симетрия $t = \dfrac{1}{2}$, то $f(y) = 0$ има решение в $[-1, 1]$ тогава и само тогава, когато $D \geq 0$

и $f(-1) \geq 0$. Сега от $D = 16(4+3m)$ и $f(-1) = 5-3m$ получаваме $m \in \left[-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right]$. Целите числа в този интервал са $m = -1, 0, 1$.

Оценяване. (6 точки) а) 1 т. за получаване на квадратно уравнение за $\cos x$; 1 т. за решаване на квадратното уравнение б) 1 т. за получаване на квадратно уравнение за $\cos x$; 3 т. за намиране на $m = -1, 0, 1$.

Задача 11.2. Даден е триъгълник ABC. През средите F и E на височините AA_1 и BB_1 е построена права, която пресича правите AC и BC съответно в M и N. Да се докаже, че правата през върха C и центъра на описаната около $\triangle ABC$ окръжност разполовява отсечката MN.



Решение. Достатъчно е да докажем, че $S_{MOC} = S_{NOC}$. Имаме

$$S_{MOC} : S_{NOC} = \frac{\frac{CM}{AC} S_{AOC}}{\frac{CN}{BC} S_{BOC}} = \frac{\frac{CM}{AC} \cdot \frac{AC.BH}{4}}{\frac{CN}{BC} \cdot \frac{BC.AH}{4}} = \frac{CM}{CN} \cdot \frac{BH}{AH}.$$

От друга страна, по теоремата на Менелай за $\triangle CAA_1$ и $\triangle CBB_1$ получаваме съответно

$$\frac{AM}{CM} \cdot \frac{CN}{NA_1} \cdot \frac{A_1F}{FA} = 1 \Rightarrow \frac{CN}{CM} = \frac{A_1N}{AM} \text{ и } \frac{B_1M}{CM} \cdot \frac{CN}{NB} \cdot \frac{BE}{EB_1} = 1 \Rightarrow \frac{CN}{CM} = \frac{BN}{B_1M}.$$

Следователно

$$\frac{CN}{CM} = \frac{A_1N + BN}{B_1M + AM} = \frac{A_1B}{AB_1} = \frac{BH}{AH},$$

откъдето следва, че $S_{MOC} = S_{NOC}$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за свеждане до равенството $S_{MOC} = S_{NOC}$; по 2 т. за всяко от двете изразявания на $\dfrac{CN}{CM}$; 1 т. за довършване на решението.

Задача 11.3. Дадено е множество A от 2014 естествени числа в интервала $[1, 6]$ и естествено число $t \leq 2014$. За един ход можем да изберем произволни t числа от A и да увеличим с 1 всяко от тях, което е по-малко от 6, а всяко число, което е равно на 6 да заменим с 1. Да се намерят всички стойности на t за които при всяко множество A след някакъв брой ходове можем да получим само шестици.

Решение. Ще докажем, че търсените числа са онези t за които $(6, t) = 1$. Нека $(6, t) = d \neq 1$ и да изберем t числа x от които са равни на 6. След извършване на разрешената операция сборът на числата се променя с $(t-x)-5x=t-6x$ и следователно се дели на d. Сега е ясно, че ако едно от числата е 5, а всички останали са 6, то не можем да получим само шестици.

Нека $(6,t)=1$ и да изберем естествено число k, за което $kt \equiv 1 \pmod 6$. Ще покажем как можем да увеличим дадено число $a \neq 6$ с единица, като всички останали числа остават непроменени. Нека B е подмножество на A с $t+1$ числа (тъй като $t \neq 2014$ такова множество съществува) и $a \in B$. Да извършим k пъти разрешената операция върху всяко от t елементните подмножества на B. Всяко число от B се променя точно kt пъти. Тъй като $kt \equiv 1 \pmod 6$, то горното е еквивалентно на еднократно прилагане на разрешената операция върху всички числа от B.

Като приложим 5 пъти операцията върху t елементното множество $B \backslash \{a\}$ ще получим, че само a е увеличено с 1.

Следователно всички числа могат да бъдат направени равни на 6.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за деклариране на верен отговор; 2 т. за решаване на случая $(t,6) \neq 1$; 4 т. за решаване на случая $(t,6)=1$.

Задача 11.4. Дадено е естествено число k. Да се намерят всички функции $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ такива, че за всеки две естествени числа m и n е изпълнено равенството

$$f(m+f_k(n)) = n + f(m+2014),$$

където $f_k(n) = \underbrace{f(f(\dots(f}_{k \text{ пъти}}(n)\dots)$. (с $\mathbf{N}$ означаваме множеството на естествените числа.)

Решение. Да допуснем, че съществува n, за което $f_k(n) < 2014$ и нека $f_k(n) = c$. Тогава

$$f(m+c) = n + f(m+c+2014-c),$$

т.е. при $x = m+c \geq c+1$ имаме $f(x) = n + f(x+r)$ за $r = 2014-c > 0$. При фиксирано x това означава, че

$$f(x) = n + f(x+r) = 2n + f(x+2r) = \cdots = sn + f(x+sn),$$

което е невъзможно, защото дясната част расте неограничено. Следователно $f_k(n) > 2014$ (при $f_k(n) = 2014$ получаваме $n=0$, което е невъзможно). При $n=1$ получаваме

$$f(m+f_k(1)-2014+2014) = 1 + f(m+2014)$$

и като положим $r = f_k(1) - 2014$ и $x = m+2014$, намираме $f(x+r) = 1 + f(x)$ за всяко $x > 2014$. От това равенство с индукция лесно следва, че $m \geq 2015$ е изпълнено равенството $f(x+tr) = t + f(x)$. При $t=n$ и $x=2015$ намираме $f(2015+nr) =$

$n+f(2015)$, а от уравнението от условието при $m=1$ имаме $n+f(2015)=f(1+f_k(n))$. Получихме равенството $f(2015+nr)=f(1+f_k(n))$ и ако допуснем, че $f(n_1)=f(n_2)$ за $n_1\neq n_2$, от условието ще имаме

$$n_1+f(m+2014)=f(m+f_k(n_1))=f(m+f_k(n_2))=n_2+f(m+2014),$$

т.е. $n_1=n_2$, което е противоречие. Следователно

$$f_k(n)=2014+nr \tag{1}$$

за всяко n. От (1) и от условието имаме

$$f(m+nr+2014)=n+f(m+2014). \tag{2}$$

Освен това $f_{k+1}(n)=f(f_k(n))=f(2014+nr)$, а от друга страна $f_{k+1}(n)=f_k(f(n))=2014+f(n)r$, откъдето

(3). $$f(2014+nr)=2014+f(n)r$$

От (3) при замяна на n с $n+1$ и от (2) при $m=r$ намираме

$$f(nr+r+2014)=rf(n+1)+2014=n+f(r+2014), \tag{4}$$

откъдето следва, че r дели $n+f(r+2014)-2014$ за всяко n. Това е възможно само при $r=1$ и заместване в (4) дава $f(n+1)=n+f(2015)-2014=n+1+f(2015)-2015=n+1+c$, т.е. $f(n)=n+c$ при $n\geq 2$ и $c=f(2015)-2015$. При $n=1$ в (3) имаме $f(1)=f(2015)-2014=1+f(2015)-2015=1+c$. Следователно $f(n)=n+c$ за всяко n. Оттук и от (1) имаме $f_k(n)=n+kc=n+2014$, т.е. $c=\dfrac{2014}{k}$. Директно се проверява, че когато k дели 2014 функцията $f(n)=n+c$ удовлетворява уравнението от условието. Когато k не дели 2014 такава функция не съществува.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за деклариран верен отговор; най-много 2 т. за съществени наблюдения, които не водят до решение.

Задача 12.1. Синусите на три различни ъгъла от интервала $[0,2\pi]$ образуват аритметична прогресия. Да се докаже, че техните косинуси не могат да образуват аритметична прогресия в същия ред.

Решение. Да допуснем противното, т.е. има три различни числа $x,y,z\in[0,2\pi]$, за които $\sin x+\sin y=2\sin z$ и $\cos x+\cos y=2\cos z$. Като повдигнем тези равенства на квадрат и ги съберем почленно, получаваме, че $\cos(x-y)=\sin x\sin y+\cos x\cos y=1$. Можем да считаме, че $x>y$. Понеже $x-y\in(0,2\pi]$, то $x=2\pi, y=0$. Тогава $z=x$ или $z=y$, което е противоречие.

Оценяване. (6 точки) 4 т. за преобразование, което води до елементарно тригонометрично уравнение, 2 т. за довършване (получаване на противоречие).

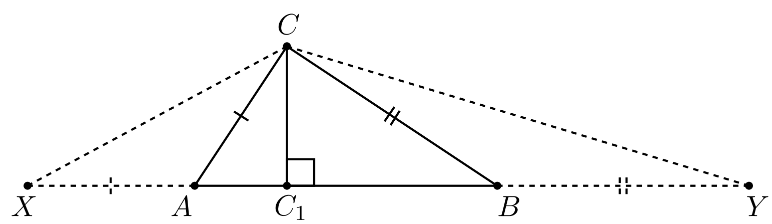
Задача 12.2. Нека CC_1 е височина в $\triangle ABC$, където C_1 е точка от правата AB. Известно е, че сумата от квадратите на периметрите на $\triangle ACC_1$ и $\triangle BCC_1$ е равна на квадрата на периметъра на $\triangle ABC$. Да се докаже, че $\sphericalangle ACB = 90^\circ$.

Решение. Понеже $P_{\triangle ACC_1} < P_{\triangle ABC}$ и $P_{\triangle BCC_1} < P_{\triangle ABC}$, то точката C_1 лежи на отсечката AB. Нека X и Y са такива точки върху правата AB, че A е между X и B, B е между A и Y, $AX = AC$ и $BY = BC$. Тогава условието приема вида

$$(XC_1 + CC_1)^2 + (YC_1 + CC_1)^2 = XY^2 \quad (*)$$

Като приложим двукратно питагоровата теорема и фомулата за лице, получаваме, че

$$XC^2 + 4S_{\triangle XCC_1} + YC^2 + 4S_{\triangle YCC_1} = XY^2,$$



От косинусова теорема за $\triangle XYC$ и равенството

$$S_{\triangle XCC_1} + S_{\triangle YCC_1} = S_{\triangle XCY} = \frac{1}{2} XC.YC.\sin\sphericalangle XCY$$

следва, че $\cos\sphericalangle XCY + \sin\sphericalangle XCY = 0$. Тогава

$$135^\circ = \sphericalangle XCY = \sphericalangle XCA + \sphericalangle C + \sphericalangle YCB = \frac{\sphericalangle A}{2} + \sphericalangle C + \frac{\sphericalangle B}{2} = 90^\circ + \frac{\sphericalangle C}{2},$$

откъдето $\sphericalangle C = 90^\circ$.

Забележка. Друго решение се получава, като (*) се преобразува във вида

$$(XC_1 + YC_1 + CC_1)CC_1 = XC_1.YC_1.$$

От $\dfrac{CC_1}{XC_1} = \tan\dfrac{\sphericalangle A}{2}$ *и* $\dfrac{CC_1}{YC_1} = \tan\dfrac{\sphericalangle B}{2}$ *следва, че* $1 = \dfrac{\tan\dfrac{\sphericalangle A}{2} + \tan\dfrac{\sphericalangle B}{2}}{1 - \tan\dfrac{\sphericalangle A}{2}\tan\dfrac{\sphericalangle B}{2}} = \cot\dfrac{\sphericalangle C}{2}$,

откъдето $\sphericalangle C = 90^\circ$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за получаване на (*), 1 т. за следващото преобразуване (от кое да е от двете решение), 2 т. за получаване на тригонометрично уравнение, 2 т. за довършване

Задача 12.3. Да се докаже, че ако a, b, c, d са положителни числа със сума 1, то

$$\frac{a^3}{4a^2+(b+c)^2}+\frac{b^3}{4b^2+(c+d)^2}+\frac{c^3}{4c^2+(d+a)^2}+\frac{d^3}{4d^2+(a+b)^2}\geq\frac{1}{8}.$$

Решение. Да забележим, че след привеждане под общ знаменател неравенството

$$\frac{a^3}{4a^2+(b+c)^2}\geq\frac{a}{4}-\frac{b+c}{16}$$

е еквивалентно на очевидното $(b+c)(2a-b-c)^2 \geq 0$. Остава да съберем почленно това неравенство с другите три подобни.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за опит за линеаризация, 4 т. за доказване на съответно неравенство, което води до решение, 2 т. за довършване.

Задача 12.4. Виж задача 11.4.

<u>Задачите са предложени от:</u>

Динко Раднев – 9.1, 11.1;
Ангел Гушев – 9.2;
Николай Белухов – 9.3;
Петър Бойваленков – 9.4 (10.4);
Стоян Боев – 10.1, 10.2;
Александър Макелов – 10.3;
Борислав Мирчев – 11.2;
Емил Колев – 11.3;
Александър Иванов – 11.4 (12.4);
Николай Николов – 12.1, 12.2, 12.3.